No. Date 27/02/19

Αν λ_1 κ' λ_2 είναι διαφορετικές ιδιοτιμές του πίνακα A, τότε τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα είναι γραμ. ανεξάρτητα. Για να βρω τα ιδιοδιανύσματα της ιδιοτιμής λ_i βρίσκω τον $\ker(A-\lambda_i I)$. Με $\boxed{V(\lambda_i)}$ συμβολίζω τον υπόχωρο $\ker(A-\lambda_i I)$ ο οποίος θα καλείται ιδιόχωρος της ιδιοτιμής λ_i του πίνακα A. Δηλ. ο $V(\lambda_i)$ περιέχει όλα τα ιδιοδιανύσματα της λ_i μαζί με το μηδενικό διάνυσμα.

$A \rightarrow X_A(\lambda)$ παραγοντοποιώ = βρίσκω ρίζες.
Για κάθε ρίζα-ιδιοτιμή βρίσκω τον αντίστοιχο ιδιόχωρο $V(\lambda_i)$

• ΠΟΡΙΣΜΑ: Οι ιδιόχωροι του πίνακα A αποτελούν ευθύ άθροισμα. Δηλ. αν λ_1 κ' λ_2 είναι ιδιοτιμές του A, τότε $V(\lambda_1) \cap V(\lambda_2) = \{\vec{0}\}$
Αν $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ είναι οι διακεκριμένες ιδιοτιμές του A, τότε $V(\lambda_1) \oplus V(\lambda_2) \oplus \cdots \oplus V(\lambda_k)$

SOS
ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

πχ: 1) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ Να εξεταστεί αν διαγωνοποιείται.

Διαγωνοποιείται <=> ∃ 3 γραμ. ανεξ. ιδιοδιανύσματα του A.

$$X_A(\lambda) = \det(A-\lambda I) = \det\begin{pmatrix} -\lambda & 0 & -2 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= (2-\lambda)\det\begin{pmatrix} -\lambda & -2 \\ 1 & 3-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)[(-\lambda)(3-\lambda) - 1\cdot(-2)] =$$

$$= (2-\lambda)(-3\lambda+\lambda^2+2) = (2-\lambda)(2-\lambda)(1-\lambda) = (2-\lambda)^2(1-\lambda)$$

$\lambda_1 = 1$ πολλαπλότητα 1

$\lambda_2 = 2$ πολλαπλότητα 2.

• $V(1) = \ker(A-I) = \langle(-2,1,1)\rangle$ γιατί:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} -x-2z=0 \\ x+y+z=0 \\ x+2z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x=-2z \\ y=-x-z= \\ =2z-z= \end{array}$$

$(x,y,z) = (-2z, z, z) = z(-2,1,1)$ κ' $\dim V(1) = 1$

• $V(2) = \ker(A-2I) = \langle(-1,0,1),(0,1,0)\rangle$ γιατί:

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} -2x-2z=0 \\ x+z=0 \\ x+z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x+z=0 \\ x=-z \\ y\in\mathbb{R} \end{array}$$

$(x,y,z) = (-z,y,z) = (-z,0,z)+(0,y,0) = z(-1,0,1)+y(0,1,0)$
κ' $\dim V(2) = 2$

$V(1)\oplus V(2) = \mathbb{R}^3$ $\quad\mathbb{R}^3 = \langle(-2,1,1),(-1,0,1),(0,1,0)\rangle$

$$S = P = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$ πίνακας μετάβασης από την στην κανονική βάση.

$$S^{-1}AS = \Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Τον S^{-1} θα τον βρω σαν πίνακα πίνακα μετάβασης από την κανονική βάση στην $\{(-2,1,1),(-1,0,1),(0,1,0)\}$

$(1,0,0) = \alpha(-2,1,1)+\beta(-1,0,1)+\gamma(0,1,0)$

$(0,1,0) = \delta(-2,1,1)+\varepsilon(-1,0,1)+\zeta(0,1,0)$

$(0,0,1) = \eta(-2,1,1)+\theta(-1,0,1)+\iota(0,1,0)$

$$S^{-1} = P^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha & \delta & \eta \\ \beta & \varepsilon & \theta \\ \gamma & \zeta & \iota \end{pmatrix} = \dots$$

πχ: 2) Να εξεταστεί για ποιες τιμές των a, b, γ ο A διαγωνοποιείται:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & a & b \\ 0 & 3 & \gamma \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\chi_A(\lambda) = \det(A-\lambda I) = \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & a & b \\ 0 & 3-\lambda & \gamma \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= (3-\lambda)(3-\lambda)(2-\lambda) = (3-\lambda)^2(2-\lambda)$$

$\lambda_1 = 2$ πολλαπλότητα 1

$\lambda_2 = 3$ πολλαπλότητα 2.

$V(2) = \ker(A-2I)$

$$\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x + ay + bz = 0 \\ y + \gamma z = 0 \\ 0 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow x = (a\gamma - b)z \qquad y = -\gamma z$

$(x,y,z) = ((a\gamma-b)z, -\gamma z, z) = z\,(a\gamma - b, -\gamma, 1)$

$V(3) = \ker(A-2I)$

$$\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} ay + bz = 0 \\ \gamma y = 0 \\ -z = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} x \in \mathbb{R} \\ z = 0 \\ ay = 0 \end{array}}$$

A διαγωνοποιείται $\Leftrightarrow$ 3 γραμ. ανεξ. ιδιοδιανύσματα του A

$\dim V(3) = 2$.

Αν $a \neq 0 \Rightarrow ay = 0 \Rightarrow y = 0 = z$ ή $(x,y,z) = (x,0,0) = x(1,0,0)$

αλλά έχω λέω 2 διανύσματα, άρα δεν διαγωνοποιείται

Άρα $a = 0 \Rightarrow ay = 0 \Rightarrow y \in \mathbb{R}$

$(x,y,z) = (x,y,0) = x(1,0,0) + y(0,1,0)$

άρα $V(3) = \langle (1,0,0), (0,1,0) \rangle$ αν $a = 0$.

Άρα τελικά ο A διαγωνοποιείται για $\boxed{a = 0,\ b, \gamma \in \mathbb{R}}$

ΘΕΩΡΗΜΑ: Έστω $A_{n\times n}$ πίνακας κ' λ_1 μια ιδιοτιμή του. Τότε $\dim V(\lambda_1) \le$ πολλαπλότητα της λ_1 στο χαρακτηριστικό πολυώνυμο

* **Απόδειξη:** Υποθέτω ότι $\dim V(\lambda_1)=k$ κ' η πολλαπλότητα της λ_1 είναι m. Δ.Ο. $k\le m$

$\dim V(\lambda_1)=k \Rightarrow V(\lambda_1)=\langle u_1,u_2,\dots,u_k\rangle$

Τα $u_1,u_2,\dots,u_k$ είναι ιδιοδιανύσματα του A κ' μάλιστα γρ. ανεξ.

Ο πίνακας A ορίζει μια γραμμική απεικόνιση $\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ ως προς τις κανονικές βάσεις.

Επεκτείνω τη βάση του $V(\lambda_1)$ σε βάση του $\mathbb{R}^n=\langle u_1,\dots,u_k,v_1,\dots,v_{n-k}\rangle$

Έστω B ο πίνακας της ίδιας γραμμικής απεικόνισης ως προς τη νέα βάση $B:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$

$$\langle u_1,\dots,u_k,v_1,\dots,v_{n-k}\rangle \to \langle u_1,\dots,u_k,v_1,\dots,v_{n-k}\rangle$$

$Au_1=\lambda_1 u_1,\ \dots,\ Au_k=\lambda_k u_k \qquad Bu_1=\lambda_1 u_1,\ \dots,\ Bu_k=\lambda_k u_k$

Άρα ο πίνακας B θα έχει μορφή στη δεύτερη βάση:

$$B=\left(\begin{array}{cccc|c}
\lambda_1 & 0 & \cdots & 0 & \\
0 & \lambda_1 & & 0 & * \\
\vdots & \vdots & \ddots & 0 & \\
0 & \cdots & & \lambda_1 & \\
\hline
0 & 0 & \cdots & 0 & \\
0 & \vdots & & 0 & \Gamma \\
0 & 0 & \cdots & 0 &
\end{array}\right)$$

$k\times k$ · $k\times(n-k)$ · $(n-k)\times(n-k)$ · $(n-k)\times k$

Οι πίνακες A κ' B είναι όμοιοι γιατί αντιστοιχούν στην ίδια απεικόνιση, αλλά σε άλλες βάσεις, άρα έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο

$$\chi_A(\lambda)=\chi_B(\lambda)=\det\left(\begin{array}{ccc|c}
\lambda_1-\lambda & & 0 & \\
0 & \ddots & \lambda_1-\lambda & * \\
\hline
& O & & \Gamma-\lambda I
\end{array}\right)$$

$$=(\lambda_1-\lambda)^k\cdot\det(\Gamma-\lambda I_{n-k})$$

Το πολυώνυμο $(\lambda_1-\lambda)^k$ διαιρεί το ①, άρα διαιρεί και το $\chi_A(\lambda)$

Τελικά η πολλαπλότητα της λ_1 θα είναι τουλάχιστον k, δηλ. $\dim V(\lambda_1)\le$ πολλαπλότητα της $\lambda_1 \Rightarrow k\le m$.

ΠΟΡΙΣΜΑ: Ο πίνακας A διαγωνοποιείται αν-ν έχει n γραμ. ανεξ. ιδιοδιανύσματα αν-ν για κάθε ιδιοτιμή λ_i ισχύει ότι $\dim V(\lambda_i) =$ πολλαπλότητα της λ_i

* **Απόδειξη:** Διαγωνοποιείται ο $A \iff \exists S$ αντιστρέψιμος κ' Λ διαγώνιος ώστε $A = S\Lambda S^{-1}$ ή $S^{-1}AS = \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \; \lambda_n \end{pmatrix}$

Αν έχει n γραμ. ανεξ. ιδιοδιανύσματα, τότε διαγωνοποιείται: $S = (u_1, \dots, u_n)$ (ιδιοδιανύσματα)

$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \; \lambda_n \end{pmatrix}$ (ιδιοτιμές)

Αν ισχύει $\dim V(\lambda_i) =$ πολλαπλότητα λ_i $\forall \lambda_i$ τότε
$\dim V(\lambda_1) + \dim V(\lambda_2) + \dots + \dim V(\lambda_n) = n$ κ'
$\dim \mathbb{R}^n =$ βαθμός του $\chi_A(\lambda)$
$V(\lambda_1) \oplus V(\lambda_2) \oplus \dots \oplus V(\lambda_k) = \mathbb{R}^n$
Άρα έχω n γραμ. ανεξ. ιδιοδιανύσματα.
Έστω ότι ο A έχει — " " —, αλλά
$\dim V(\lambda_i) <$ πολλαπλότητα του λ_i
$\dim V(\lambda_1) + \dots + \dim V(\lambda_k) < n =$ άθροισμα πολ/τητων $=$ βαθμός του $\chi_A(\lambda)$
Αλλά τότε δεν μπορώ να έχω n γραμ. ανεξ. ιδιοδιανύσματα — ΑΤΟΠΟ. Άρα $\dim V(\lambda_i) =$ πολ/τητα λ_i $\forall \lambda_i$
Αν διαγωνοποιείται ($\exists S$ κ' Λ διαγώνιος με $A = S\Lambda S^{-1}$) τότε έχει n γραμ. ανεξ. ιδιοδιανύσματα.
Λ διαγώνιος, A κ' Λ όμοιοι, άρα έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο, όλα τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου του Λ είναι οι ιδιοτιμές του A.
Ο S είναι αντιστρέψιμος κ' περιέχει τα ιδιοδιανύσματα τα οποία είναι n κ' γραμμικά ανεξάρτητα.

πχ. 1) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ Να εξεταστεί αν διαγωνοποιείται.

$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2$

άρα $\lambda=0$ με πολλαπλότητα 2.

$V(0)=\ker(A-0\cdot I)=\ker A$

$\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix}y=0\\ x\in\mathbb{R}\end{matrix}$ Άρα $(x,y)=(x,0)=x\boxed{(1,0)}$

Άρα $\dim V(0)=1 \leq 2$

Άρα δε διαγωνοποιείται.

2) $A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\4&0&-1\\4&-2&1\end{pmatrix}$ Να εξεταστεί αν διαγωνοποιείται.

$\chi_A(\lambda)=\det(A-\lambda I)=\det\begin{pmatrix}1-\lambda&-1&1\\4&-\lambda&-1\\4&-2&1-\lambda\end{pmatrix}=$

$=\det\begin{pmatrix}1-\lambda&0&1\\4&-\lambda-1&-1\\4&-\lambda-1&1-\lambda\end{pmatrix}=(-1-\lambda)\det\begin{pmatrix}1-\lambda&0&1\\4&1&-1\\4&1&1-\lambda\end{pmatrix}=$

$=-(\lambda+1)\det\begin{pmatrix}1-\lambda&0&1\\4&1&-1\\0&0&2-\lambda\end{pmatrix}=-(\lambda+1)(2-\lambda)\det\begin{pmatrix}1-\lambda&0&1\\4&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$

$=(\lambda+1)(\lambda-2)\det\begin{pmatrix}1-\lambda&0\\4&1\end{pmatrix}=(\lambda+1)(\lambda-2)(1-\lambda-0)=$
$=(\lambda+1)(\lambda-2)(1-\lambda)$

Άρα $\lambda_1=-1$ πολλαπλότητα 1
$\lambda_2=2$ — " —
$\lambda_3=1$ — " —

! Ο A διαγωνοποιείται διότι η κάθε ιδιοτιμή έχει πολλαπλότητα 1. Άρα οι ιδιόχωροι έχουν διάσταση 1, ίση με την πολλαπλότητα. Αυτό συμβαίνει πάντα όταν ο A έχει διακεκριμένες ιδιοτιμές.

Έστω $T: V^n \to V^n$ ενδομορφισμός στον πεπερασμένης διάστασης δ.χ. V. Ως προς συγκεκριμένες βάσεις ο T έχει διαφορετικό πίνακα.

Έστω A ο πίνακας του T ως προς την κανονική βάση κ' B ως προς μια άλλη.

- **Ερώτημα:** Μπορώ να ορίσω χαρακτηριστικό πολυώνυμο για T;

Η σχέση του A με τον B δίνεται:

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{T} \mathbb{R}^n$$

$$\begin{array}{ccc} \langle\text{κανονική}\rangle & \xrightarrow{A_T} & \langle\text{κανονική}\rangle \\ \downarrow P & & \uparrow P^{-1} \\ \langle\text{άλλη}\rangle & \xrightarrow{B_T} & \langle\text{άλλη}\rangle \end{array}$$

$$\boxed{A_T = P^{-1} B_T P}$$

<u>όμοιοι</u>

Οι πίνακες A_T κ' B_T είναι όμοιοι μεταξύ τους. Άρα έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο. Άρα μπορώ να ορίσω το χαρακτηριστικό πολυώνυμο ενός ενδομορφισμού T να είναι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο ενός πίνακά του από μια βάση στην ίδια.

$T: V \to V$ $\quad X_T(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ όπου A ένας πίνακας του T για τον οποίο ισχύει

πχ. Δίνεται ο $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ με τύπο
$T(x,y,z) = (-2z, x+2y+z, x+3z)$ Διαγωνοποιείται;

$$X_T(\lambda) = X_A(\lambda) \text{ με } A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Έχω δείξει προηγουμένως ότι διαγωνοποιείται κ' έχω:

$\lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = \lambda_3 = 2 \qquad V(1) = \langle(-2,1,1)\rangle, \; V(2) = \langle(-1,0,1),(0,1,0)\rangle$

$$S = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$T(-2,1,1) = 1(-2,1,1)$

$T(-1,0,1) = (-2,0,2) = 2(-1,0,1)$

$T(0,1,0) = 2(0,1,0)$

$$A = S\Lambda S^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} S$$

No.

Υπάρχει πίνακας B ώστε $A=B^2$ ή $A=B^3$;

Ο B θα μπορούσε να είναι ο: $B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\sqrt{2}&0\\0&0&\sqrt{2}\end{pmatrix}$

$(S\Lambda S^{-1})^2 = S\Lambda S^{-1} S\Lambda S^{-1} = S\Lambda I \Lambda S^{-1} = S\Lambda^2 S^{-1}$

$$B^2 = \left[S \begin{pmatrix}\sqrt{1}&0&0\\0&\sqrt{2}&0\\0&0&\sqrt{2}\end{pmatrix} S^{-1} \right]^2 = S\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}S^{-1}=A.$$

Κ' για $B^3=A$:

$$B= S\begin{pmatrix}\sqrt[3]{1}&0&0\\0&\sqrt[3]{2}&0\\0&0&\sqrt[3]{2}\end{pmatrix}S^{-1} = \dots$$

Αν A είναι διαγωνοποιήσιμος, $A=S\Lambda S^{-1}$ κ' ζητείται πίνακας B ώστε $A=B^{2k+1}$, τότε για τον B μπορώ να πάρω τον πίνακα:

$$B=S\begin{pmatrix}\sqrt[2k+1]{\lambda_1} & & & 0\\ & \sqrt[2k+1]{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \sqrt[2k+1]{\lambda_n}\end{pmatrix}S^{-1}$$

Τότε $B^{2k+1}=A$

Αν ζητείται άρτια δύναμη $B^{2k}=A$ προσέχω να έχω μη-αρνητικές ιδιοτιμές